Formosa Journal of Science and Technology (FJST)
Vol. 2, No. 1, 2023: 81-88

Metric Dimensions and Partition Dimensions of a Multiple Fan Graph

Restina Silalahi[1*], Mulyono[2]
Universitas Negeri Medan
Corresponding Author: Restina Silalahi restinasillalahi23@gmail.com

A R T I C L E I N F O

Keywords: Metric Dimensions, Partition Dimensions, Multiple Fan Graph, Python

Received : 05, December
Revised : 28, December
Accepted: 22, January

A B S T R A C T

The metric dimension is a distinguishing set with minimum cardinality, while the partition dimension is a distinguishing set with cardinality. The purpose of this study is to find the metric and partition dimensions of a double fan graph which is the result of the join operation of the complete graph $2K_1$ and the path graph P_n. The results obtained from this study are the metric dimensions $dim(2K_1 + P_n) = \begin{cases} 5 \\ \lceil 2n+2 \rceil \end{cases}$, partition dimensions $pd(2K_1 + P_n) = \left|\frac{dim(2K_1 + P_n)}{2}\right| + 2$.

DOI: https://doi.org/10.55927/fjst.v2i1.2759
ISSN-E: 2964-6804
https://journal.formosapublisher.org/index.php/fjst

Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi dari Graf Kipas Ganda

Restina Silalahi[1*], Mulyono[2]
Universitas Negeri Medan
Corresponding Author: Restina Silalahi restinasillalahi23@gmail.com

A R T I C L E I N F O

Kata Kunci: Dimensi Metrik, Dimensi Partisi, Graf Kipas Ganda, Python

Received : 05, December
Revised : 28, December
Accepted: 22, January

A B S T R A K

Dimensi metrik merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum, sedangkan dimensi partisi merupakan partisi pembeda dengan kardinalitas. Tujuan dari penelitian ini untuk mencari dimensi metrik dan dimensi partisi dari graf kipas ganda yang merupakan hasil operasi *join* dari graf lengkap $2K_1$ dan graf lintasan P_n. Hasil yang diperoleh dari penelitian adalah dimensi metrik $dim(2K_1 + P_n) = \{$ [illegible] , dimensi partisi $pd(2K_1 + P_n) = \left|\frac{dim(2K_1 + P_n)}{[illegible]}\right| + 2$.

PENDAHULUAN

Perkembangan teori graf saat ini berkembang pesat setelah di tahun 1736 Leonhard Euler, seorang matematikawan Swiss menyelesaikan permasalahan teka-teki jembatan Konigsberg. Sejak saat itu mulai bermunculan konsep-konsep lain dalam teori graf untukmengatasi permasalahan dalam kehidupan nyata. Teori graf merepresentasikan mengenai objek-objek diskrit dan bagaimana hubungan antara objek-objek diskrit tersebut (Slamin, 2019). Masalah optimasi jaringan transportasi merupakan salah satu permasalahan yang sering diselesaikan dengan melibatkan peranan teori graf (Wamiliana, 2022).

Selain mempelajari mengenai terminologi, jenis dan sifat-sifat graf. Graf juga mempelajari mengenai dimensi metrik dan dimensi partisi. Dimensi-dimensi hadir seiring perkembangan ilmu pengerahuan dimana tahun 1975 ditemukan oleh Slater dan juga oleh Harary dan Melter (Rohmawati & Lukito, 2013). Perkembangan ilmu pengetahuan mengenai dimensi metrik dan dimensi partisi tidak hanya dalam teori saja namun mampun menciptakan aplikasi yang bermanfaat bagi kehidupan manusia. Pengaplikasian dimensi metrik ditemukan dalam pemasangan sensor kebakaran sebuah gedung untuk mengurangi jumlah sensor kebakaran (Wahyudi, 2018).

Beberapa penelitian terdahulu telah meneliti mengenai dimensi metrik dan dimensi partisi dari beberapa graf dan pengaplikasiannya dalam kehidupan sehari-hari. Sehingga pada penelitian ini akan menggunakan graf baru yaitu graf kipas ganda yang merupakan pengembangan dari graf kipas. Graf kipas ganda dibentuk dari hasil operasi *join* atau penggabungan antara graf lengkap $2K_1$dan graf lintasan P_n. Pada penelitian ini akan mencari dimensi metrik dan dimensi partisi dari graf kipas ganda untuk $n \geq 2$.

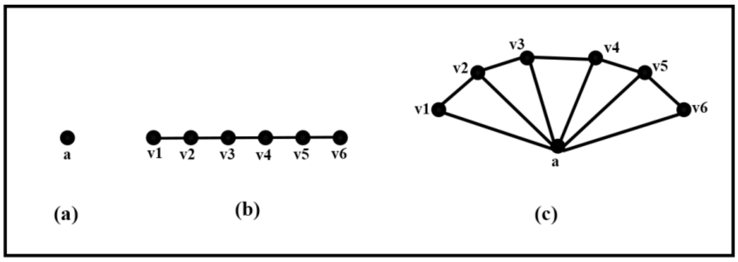
TINJAUAN PUSTAKA

Pengertian Graf

Sebuah graf G adalah pasangan himpunan $G = (V, E)$ dimana V disebut *vertex* himpunan tidak kosong dari simpul-simpul dan terhingga, dinotasikan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. E disebut *edge*, himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul, dinotasikan dengan $E(G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ (Buhaerah & Sanjaya, 2022).

Operasi Join pada Graf

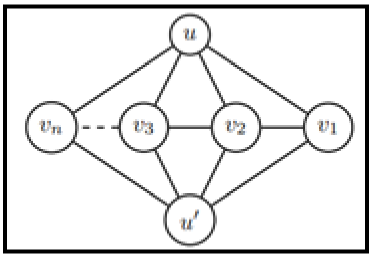
Operasi join pada graf dilakukan dengan cara menggabungkan setiap simpul yang terfapat pada graf G_1sehingga bertetangga dengan setiap simpul yang terdapat pada graf G_2 , dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$. Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah dua buah graf sedemikian sehingga $(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Maka operasi join dari graf $G_1 + G_2$ memiliki himpunan simpul $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv: u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$. Graf kipas merupakan hasil operasi join dari K_1 dan P_n, berarti $K_1 + P_n$.



Gambar 1. (a) Graf K_1 (b) Graf P_6 (c) Operasi join Graf Kipas $K_1 + P_6$

Graf Kipas Ganda

Graf kipas dan graf kipas ganda merupakan hasil operasi penggabungan antara graf lintasan dan graf lengkap. Graf kipas yaitu $K_1 + P_n$, sedangkan graf kipas ganda yaitu $2K_1 + P_n$. Dengan demikian graf kipas ganda memiliki $n + 2$ simpul dan $3n - 1$ sisi.



Gambar 2. (a) Graf Kipas Ganda

(Khotimah & Susanti, 2019).

Dimensi Metrik

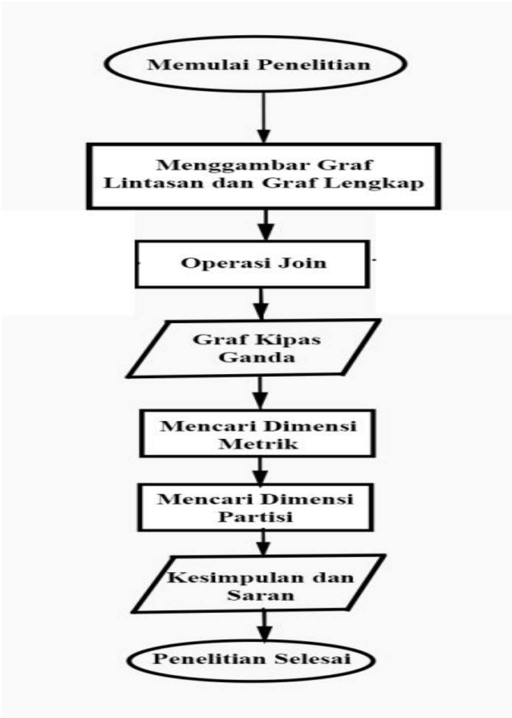
u dan v adalah simpul-simpul dari graf G. Jarak antara kedua simpul tersebut dinotasikan dengan $d(u, v)$ dan didefinisikan sebagai lintasan terpendek antara kedua simpul tersebut. Jika diberikan suatu himpunan terurut $Z = \{z_1, z_2, z_3, \cdots, z_k\} \subset V(G)$. Maka representasi simpul v terhadap Z dinotasikan dengan $r(v|Z) = \big(d(v, z_1), d(v, z_2), \cdots, d(v, z_k)\big)$. Z disebut himpunan pembeda dari G jika setiap simpul $v \in G$ berbeda. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda disebut dimensi metrik dari G dan dinotasikan dengan $dim(G)$ (Febrian, Mulyono, & Marpaung , 2022).

Dimensi Partisi

Himpunan simpul $V(G)$ dipartisi menjadi beberapa partisi, dinotasikan dengan $\Pi = \{M_1, M_2, M_3, \cdots, M_k\}$. Representasi simpul v terhadap Π merupakan jarak antara simpul v ke tiap-tiap elemen di Π , dinotasikan dengan $r(v|\Pi) = \big(d(v, M_1), d(v, M_2), \cdots, d(v, M_k)\big)$. Π disebut partisi pembeda dari G jika setiap simpul $v \in G$ berbeda. Kardinalitas minimum dari partisi pembeda disebut dimensi partisi dari G dan dinotasikan dengan $pd(G)$.

METODOLOGI

Jenis penelitian yang dilakukan adalah penelitian kepustakaan dan mengeksplorasi pola. Penelitian kepustakaan yaitu penelusuran beberapa literatur untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi yang relevan dengan topik pembahasan. Eksplorasi pola yaitu mencari pola untuk membangun himpunan pembeda dari dimensi metrik dan partisi pembedan dari dimensi partisi sedemikian hingga nilai koordinat minimum dan berbeda. Berikut ini kerangka penelitian yang akan dilakukan:



Gambar 3. Kerangka Penelitian

HASIL PENELITIAN

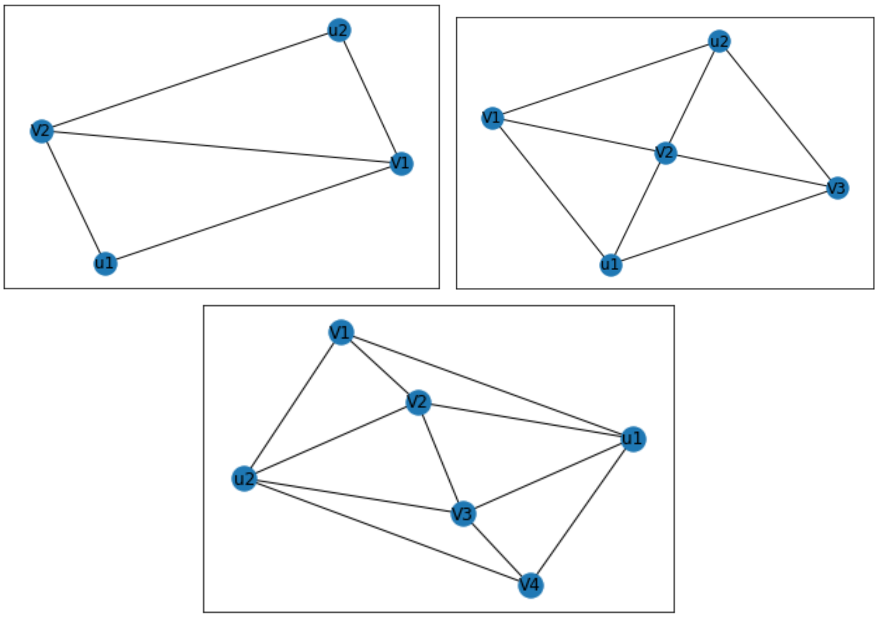
Graf Kipas Ganda

Graf kipas ganda dinotasikan dengan $2K_1 + P_n$ untuk $n \geq 2$ merupakan banyak simpul pada graf lintasan. Adapun simpul-simpul yang terdapat dalam graf kipas ganda adalah $V(2K_1 + P_n) = \{u_1, u_2, v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ dimana $V(2K_1) = \{u_1, u_2\}$ dan $V(P_n) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$.

Table 1. Jarak Antar Simpul dari Graf Kipas Ganda

Simpul	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	v_4	$\cdots$	v_n
u_1	0	2	1	1	1	1	$\cdots$	1
u_2	2	0	1	1	1	1	$\cdots$	1
v_1	1	1	0	1	2	2	$\cdots$	2
v_2	1	1	1	0	1	2	$\cdots$	2
v_3	1	1	2	1	0	1	$\cdots$	2
v_4	1	1	2	2	1	0	$\cdots$	2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
v_n	1	1	2	2	2	2	$\cdots$	0

Berikut ini merupakan graf kipas ganda untuk n = 2, 3, dan 4.



Gambar 4. Graf Kipas Ganda $2K_1 + P_n$ untuk n = 2, 3, dan 4

Lemma 4
Dimensi metrik dari graf kipas ganda $2K_1 + P_n$ adalah 3.
Bukti

Dalam memilih simpul-simpul yang menjadi anggota himpunan pembeda. Ambil, sebuah simpul dari graf lengkap $(2K_1)$ dan simpul tambahan dari graf lintasan (P_n). Simpul yang akan menjadi anggota himpunan pembeada memiliki selisih dua atau tiga dari simpul sebelumnya agar memiliki representasi yang berbeda. Ambil $= \{u_1, v_1, v_3\}$, maka diperoleh bahwa B merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum.

PEMBAHASAN

Teorema 4.1 Misalkan $2K_1$ adalah buah graf lengkap dan P_n adalah graf lintasan untuk $n \geq 2$, maka

$$dim(2K_1 + P_n) = \begin{cases} \dfrac{2n+7}{5}, untuk\ n = 5i + 4 \geq 0 \\ \left\lceil \dfrac{2n+2}{5} \right\rceil, untuk\ n \neq 5i + 4 \geq 0 \end{cases}$$

Bukti.

Kasus 1: untuk $n = 5i + 4; i \geq 0$

Graf kipas ganda bukan merupakan graf lintasan, maka $dim(2K_1 + P_n) \geq 2$. Selanjutnya, berdasarkan lemma 4.3 ambil sebarang $\frac{2n+2}{5}$ simpul maka akan terdapat $\frac{2n+2}{5}$ anggota himpunan pembeda dan pasti terdapat sedikitnya dua simpul yang memiliki representasi yang sama terhadap W. Sehingga, batas bawah dimensi metrik adalah $dim(2K_1 + P_n) \geq \frac{2n+7}{5}$. Pilih satu simpul tambahan yang memiliki representasi yang sama dengan lemma 4.3 sehingga $\frac{2n+7}{5}$ ada simpul yang menjadi anggota himpunan pembeda. Karena $\frac{2n+7}{5}$ simpul yang akan memiliki representasi yang berbeda terhadap W. Sehingga, batas atas dimensi metrik adalah $dim(2K_1 + P_n) \leq \frac{2n+7}{5}$.

$\therefore dim(2K_1 + P_n) = \frac{2n+7}{5}, untuk\ n = 5i + 4 \geq 0.$

Kasus 2: untuk $n \neq 5i + 4 \geq 0$

Berdasarkan lemma 4.3 , pilih sebarang $\left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil - 1$ simpul maka akan terdapat $\left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil - 1$ anggota himpunan pembeda dan akan terdapat sedikitnya dua buah simpul yang memiliki representasi yang sama terhadap W. Sehingga, batas bawah dari dimensi metrik adalah $dim(2K_1 + P_n) \geq \left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil$. Pilih satu simpul tambahan yang memiliki representasi yang sama dengan lemma 4.3, sehingga $\left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil$ adalah simpul yang menjadi anggota himpunan pembeda. Oleh karena $\left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil$ simpul memiliki representasi yang berbeda terhadap W. Sehingga, batas atas dari dimensi metrik adalah $dim(2K_1 + P_n) \leq \left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil$.

$\therefore dim(2K_1 + P_n) = \left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil, untuk\ n \neq 5i + 4 \geq 0.$

Teorema 4.2 Misalkan $2K_1$ adalah dua buah graf lengkap dan P_n adalah graf lintasan untuk $n \geq 2$, maka $pd(2K_1 + P_n) = \left\lceil \frac{dim(2K_1+P_n)}{2} \right\rceil + 2$.

Bukti.

Untuk $n \geq 2$, maka akan ditunjukkan bahwa $pd(2K_1 + P_n) \geq \left\lceil \frac{dim(2K_1+P_n)}{2} \right\rceil + 2$. Jika $pd(2K_1 + P_n) = \left\lceil \frac{dim(2K_1+P_n)}{2} \right\rceil + 1$ partisi, maka bukan merupakan partisi pembeda dan akan terdapat sedikitnya dua simpul dengan representasi yang sama. Oleh karena itu, sedikitnya terdapat $\left\lceil \frac{dim(2K_1+P_n)}{2} \right\rceil + 1$ partisi yang merupakan partisi pembeda, sehingga $pd(2K_1 + P_n) \geq \left\lceil \frac{dim(2K_1+P_n)}{2} \right\rceil + 2$. Sedangkan untuk mengetahui $pd(2K_1 + P_n) \leq \left\lceil \frac{dim(2K_1+P_n)}{2} \right\rceil + 2$, maka dilakukan kontruksi, andaikan partisi pembeda $\Pi = \left\{S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{\left\lceil \frac{dim(2K_1+P_n)}{2} \right\rceil + 2}\right\}$. Sedemikian hingga:

$$S_k = \begin{cases} u_{1|i=1}, & untuk\ k = 1 \\ u_{1|i=2,} & untuk\ k = 2 \\ \{v_i | 1 \leq i \leq n, i\ ganjil\} & untuk\ k = \left\lceil \dfrac{dim(2K_1 + P_n)}{2} \right\rceil + 2 \\ \{v_i | 1 \leq i \leq n, i\ genap\} & untuk\ k = \left\lceil \dfrac{dim(2K_1 + P_n)}{2} \right\rceil + 1 \end{cases}$$

Dimana diperoleh representasi yang berbeda pada setiap simpul $V(2K_1 + P_n)$ terhadap Π dan memiliki partisi minimal. Sehingga $pd(2K_1 + P_n) \leq \left\lceil \frac{dim(2K_1 + P_n)}{2} \right\rceil + 2$.

$\therefore pd(2K_1 + P_n) = \left\lceil \frac{dim(2K_1 + P_n)}{2} \right\rceil + 2$.

KESIMPULAN DAN REKOMENDASI

Berdasarkan hasil penelitian didapatkan bahwa dimensi metrik graf kipas ganda $dim(2K_1 + P_n) = \begin{cases} \frac{2n+7}{5}, untuk\ n = 5i + 4 \geq 0 \\ \left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil, untuk\ n \neq 5i + 4 \geq 0 \end{cases}$, dan dimensi partisi graf kipas ganda $pd(2K_1 + P_n) = \left\lceil \frac{dim(2K_1 + P_n)}{2} \right\rceil + 2$. Sehingga saran dari hasil penelitian ini sekiranya dapat membantu dalam mencari dimensi metrik dan dimensi partisi dari graf lainnya.

PENELITIAN LANJUTAN

Keterbatasan penelitian ini belum dapat menemukan pengaplikasian dalam kehidupan sehari-hari yang menggunakan dimensi metrik dan dimensi partisi dari graf kipas ganda, sehingga untuk penelitian selanjutnya dapat menemukan pengaplikasian yang bermanfaat dalam kehidupan sehari-hari.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terimakasih kepada bapak Dr. Mulyono, M. Si yang telah memberikan saran dan perbaikan atas penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Buhaera, B. Z., & Sanjaya, H. (2022). Teori Graf dan Aplikasinya. LSQ. Makassar.

Febrian, D., Mulyono., & Marpaung, B. (2022). Metric Dimension of The Branched-Prism Graph $C_n \times P_2 \odot N_m$. *AIP Conference Proceedings 2659,* 110015, 1-7.

Khotimah, H., & Susanti, Y. (2019). Kekuatan Total Tak Reguler Sisi Graf Double Fan dan Graf-Graf Terkait Graf DOuble Fan. *Journal Matematika Thales,* 1(1), 1-11.

Rohmawati, S., & Lukito, A. (2013). Grup Automorfisme Graf Kipas dan Graf Kipas Ganda. *Mathunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, 1(1), 1-6.

Slamin. (2019). Teori Graf dan Aplikasinya. CV. Dream Litera Buana. Malang.

Wahyudi, S. (2018). Aplikasi Dimensi Metrik untuk Meminimalkan Pemasangan Senor Kebakaran Sebuah Gedung. *J.Mathand Its Appl,* 15(2), 89-96.

Wamiliana. (2022). Minimum Spanning Tree dan Desain Jaringan. Pusaka Media. Bandar Lampung.