

Stability Analysis of Mathematical Models of Toxoplasmosis Spread in Cat and Human Populations with Time Delay

Novandri Sitinjak^{1*}, Tri Andri Hutapea²
Jurusan Matematika, Universitas Negeri Medan

Corresponding Author: Novandri Sitinjak novandrisitinjak@gmail.com

ARTICLE INFO

Keywords: Toxoplasmosis, Stability Analysis, Time Delay, Oocyst

Received : 19, December

Revised : 21, January

Accepted: 18, February

©2023 Sitinjak, Hutapea: This is an open-access article distributed under the terms of the [Creative Commons Atribusi 4.0 Internasional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



ABSTRACT

Toxoplasmosis is caused by the parasite *Toxoplasma gondii*. In this study, model construction, determining the equilibrium point, stability analysis, and model simulation were carried out. The results showed that there were two equilibrium points, namely the disease-free equilibrium point, locally asymptotically stable if and disease endemic, locally asymptotically stable if. The simulation results show when the solution is stable towards the free equilibrium point, when the solution is stable towards the disease endemic equilibrium point without delay or with time delay. Giving a time delay will cause differences in the population dynamics of each class at the start, but then all solutions move towards a stable point.

Analisis Kestabilan Model Matematika Penyebaran Toksoplasmosis pada Populasi Kucing dan Manusia dengan Waktu Tunda

Novandri Sitinjak^{1*}, Tri Andri Hutapea²

Jurusan Matematika, Universitas Negeri Medan

Corresponding Author: Novandri Sitinjak novandrisitinjak@gmail.com

ARTICLE INFO

Kata Kunci: Toksoplasmosis, Analisis Kestabilan, Waktu Tunda, *Ookista*

Received : 19, December

Revised : 21, January

Accepted: 18, February

©2023 Sitinjak, Hutapea: This is an open-access article distributed under the terms of the [Creative Commons Atribusi 4.0 Internasional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



ABSTRAK

Toksoplasmosis disebabkan oleh parasit *Toxoplasma gondii*. Dalam penelitian ini dilakukan konstruksi model, menentukan titik ekuilibrium, analisis kestabilan, dan simulasi model. Hasil penelitian menunjukkan terdapat dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit, stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan endemik penyakit, stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$. Hasil simulasi menunjukkan ketika $R_0 < 1$ solusi stabil menuju titik ekuilibrium bebas, ketika $R_0 > 1$ solusi stabil menuju titik ekuilibrium endemik penyakit tanpa waktu tunda maupun dengan waktu tunda. Pemberian waktu tunda akan menyebabkan perbedaan dinamika populasi setiap kelas pada waktu awal, namun selanjutnya semua solusi bergerak menuju titik kestabilan.

PENDAHULUAN

Toksoplasmosis merupakan salah satu dari sekian banyak penyakit zoonosis, yaitu penyakit yang secara alami dapat menular dari hewan ke manusia. *Toksoplasmosis* disebabkan oleh parasit *Toxoplasma gondii*. *Toxoplasma gondii* memiliki tiga stadium hidup, yaitu *ookista*, *bradizoit*, dan *takizooit*. Gejala klinis dari penyakit ini tidak nampak, namun telah banyak menimbulkan kerugian baik bagi manusia maupun hewan yang terkena infeksi. Satu-satunya hospes definitif yang diketahui untuk *Toxoplasma gondii* adalah anggota Familia Felidae (keluarga kucing).

Kucing memainkan peran penting dalam penyebaran *toksoplasmosis*. Kucing terinfeksi dengan memakan binatang pengerat, burung, atau hewan kecil lain yang terinfeksi. Parasit tersebut kemudian ditumpahkan bersamaan dengan kotoran kucing dalam bentuk *ookista*. *Ookista* yang ditumpahkan oleh kucing tidak dapat menginfeksi sampai *ookista* bersporulasi. Sporulasi merupakan suatu proses dimana *ookista* yang belum dapat menginfeksi berubah menjadi bentuk yang sudah dapat menginfeksi. Proses sporulasi bergantung pada lingkungan eksternal, suhu yang tinggi mendukung proses sporulasi dari *ookista* (Fabianingsih et al 2016). Mahkluk hidup lain termasuk kucing rentan yang berada di lingkungan akan terinfeksi setelah menelan *ookista*. Manusia juga akan terinfeksi apabila menelan *ookista*, pada manusia penularan juga dapat terjadi secara vertikal dari ibu ke janin, dan melakukan transfusi darah atau tranplasi organ dengan manusia terinfeksi

Angka prevalensi *toksoplasmosis* hewan dan manusia di berbagai negara bervariasi. Pada manusia, prevalensi zat anti *Toxoplasma gondii* yang positif (seroprevalensi) di beberapa negara adalah sebagai berikut: USA 13-68%, Austria 7-62%, El Salvador 40-93%, Finlandia 7-35%, Inggris 8- 25%, Prancis 33-87%. Seroprevalensi *toksoplasmosis* pada manusia di Indonesia berkisar antara 2%-88% dengan angka yang bervariasi di masing-masing daerah. Lima daerah yang memiliki prevalensi kejadian *toksoplasmosis* pada manusia tertinggi di Indonesia dari urutan pertama yaitu Lampung (88,23%), Kalimantan Timur (81,25%), DKI Jakarta (76,92%), Sulawesi Tengah (76,47%) dan Sumatera Utara (68,96%). Angka prevalensi *toksoplasmosis* pada hewan juga didapatkan cukup tinggi di Indonesia, yaitu sebagai berikut: kucing 35-73%, babi 11-36%, kambing 11-61%, anjing 75% dan pada ternak lain kurang dari 10% (Riyanda, dkk, 2019). Berdasarkan semua fakta tersebut, penting untuk membangun model matematika untuk mempelajari dan menentukan strategi pencegahan dan pengendalian penyakit *toksoplasmosis*.

Pada penelitian ini dikembangkan model matematika penyebaran *toksoplasmosis* pada populasi kucing dan manusia yang sebelumnya telah dikaji oleh Gonzalez-Parra et al. (2022) mengenai model penyebaran *toksoplasmosis* pada populasi kucing. Perbedaan penelitian ini dengan penelitian sebelumnya yaitu dimasukkan populasi manusia pada model. Penelitian ini bertujuan untuk mengamati perubahan nilai parameter khususnya waktu tunda terhadap dinamika model.

TINJAUAN PUSTAKA

Toksoplasmosis

Toksoplasmosis merupakan penyakit yang disebabkan oleh parasit *Toxoplasma gondii*. *Toxoplasma gondii* pertama kali ditemukan oleh Nicole dan Manceaux tahun 1908 pada limfa hati hewan pengerat di Tunisia (Hutchison, 1970). *Toxoplasma gondii* memiliki tiga stadium hidup, yaitu *ookista*, *bradizoit*, dan *takizooit*. Satu-satunya hospes definitif yang diketahui untuk *Toxoplasma gondii* adalah anggota *Familia Felidae* (keluarga kucing). Kucing memainkan peran penting dalam penyebaran toksoplasmosis. Kucing terinfeksi dengan memakan binatang pengerat, burung, atau hewan kecil lain yang terinfeksi. Parasit tersebut kemudian ditumpahkan bersamaan dengan kotoran kucing dalam bentuk *ookista*. Mahkluk hidup yang berada di lingkungan akan terinfeksi setelah menelan *ookista*. Manusia juga akan terinfeksi apabila menelan *ookista*, pada manusia penularan juga dapat terjadi secara vertikal dari ibu ke janin, dan melakukan transfusi darah atau tranplasi organ dengan manusia terinfeksi. Ketika penyakit terjadi biasanya gejala ringan muncul seperti, flu, nyeri otot, kepala pusing hingga berminggu-minggu. Jika perempuan yang sedang hamil terinfeksi toksoplasmosis dapat menyebabkan keguguran, pembesaran atau pengecilan kepala pada bayi setelah dilahirkan, gangguan perkembangan mental pada anak setelah lahir, hingga kematian setelah dilahirkan (CDC).

Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (*Basic Reproduction Number*) dasar dinotasikan dengan R_0 merupakan suatu ukuran potensi penyebaran penyakit dalam suatu populasi. Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai nilai harapan banyaknya populasi rentan menjadi terinfeksi yang disebabkan oleh individu *infected*. Untuk menentukan bilangan reproduksi dasar akan digunakan metode *Next Generation Matrix* (NGM).

Kemungkinan yang dapat terjadi pada kondisi bilangan reproduksi menurut Driessche dan Wuatmough (2008) adalah

1. Jika $R_0 < 1$ maka jumlah individu yang terinfeksi akan menurun pada generasi, sehingga penyakit tidak akan menyebar.
2. Jika $R_0 > 1$ maka jumlah individu yang terinfeksi akan meningkat pada generasi, sehingga penyakit akan menyebar.

Kriteria Routh-Hurwitz

Dalam penerapannya tidak selamanya kita bertemu dengan persamaan karakteristik yang mudah dievaluasi akar-akar atau nilai eigennya. Kriteria Routh-Hurwitz merupakan metode yang menunjukkan apakah suatu akar-akar yang tidak stabil dalam polinom berorde n tanpa perlu menyelesaikannya.

Diberikan suatu sistem persamaan karakteristik dalam bentuk polinomial sebagai berikut:

$$f(s) = a_0s^n + a_1s^{(n-1)} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

Jika persamaan tersebut mempunyai bagian real negatif maka

$$\frac{a_1}{a_0} > 0, \frac{a_2}{a_0} > 0, \dots, \frac{a_n}{a_0} > 0$$

METODOLOGI

Penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan atau riset kepustakaan (library research). Riset kepustakaan atau biasa disebut studi pustaka adalah rangkaian kegiatan yang berkaitan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat serta mengolah bahan penelitian. Penelitian kepustakaan atau studi literatur yaitu pencarian dengan cara penelaahan terhadap beberapa literatur yang berhubungan dengan topik pembahasan, informasi untuk penelitian ini berasal dari buku referensi, jurnal, serta definisi dan teorema yang berkaitan dengan topik pembahasan. Jenis data yang digunakan dalam melakukan penelitian, yaitu data sekunder yang diperoleh dari penelitian-penelitian sebelumnya.

HASIL PENELITIAN

Karakteristik Toksoplasmosis

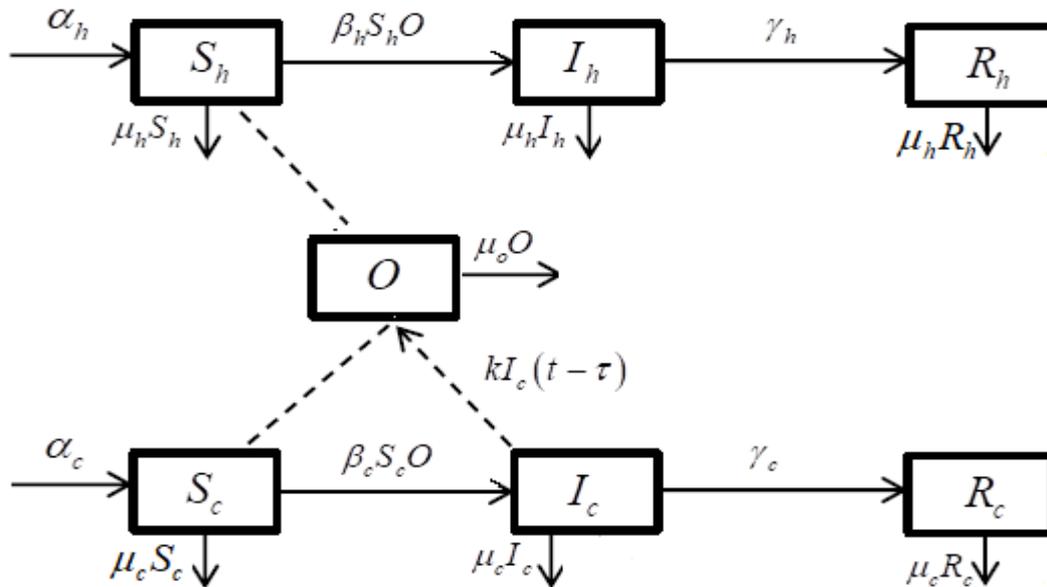
Ookista yang ditumpahkan oleh kucing tidak dapat menginfeksi sampai *ookista* bersporulasi. Sporulasi merupakan suatu proses dimana *ookista* yang belum matang, belum dapat menginfeksi berubah menjadi bentuk yang matang dan sudah dapat menginfeksi. Proses sporulasi bergantung pada lingkungan eksternal, suhu yang tinggi mendukung proses sporulasi dari *ookista* (Fabianingsih *et al* 2016). *Ookista* yang belum bersporulasi dapat bertahan hidup di lingkungan selama 14-18 hari. Sedangkan *ookista* yang telah bersporulasi dapat bertahan hidup di lingkungan selama selama 28 hari untuk itu diperlukan parameter waktu tunda pada model penyebaran toksoplasmosis. Asumsi-asumsi yang digunakan pada pembentukan model sebagai berikut.

- Populasi tertutup
- Kelahiran dan kematian alami kucing dan manusia diasumsikan sama, sehingga populasi kucing dan manusia konstan.
- Manusia dan kucing akan terinfeksi hanya apabila terjadi interaksi antara manusia dan *ookista* ataupun kucing dengan *ookista*. Bentuk interaksi yang terjadi berupa tertelannya *ookista*.
- Manusia dan kucing yang sudah sembuh dari toksoplasmosis memiliki kekebalan tubuh seumur hidup sehingga tidak dapat terinfeksi kembali

Perumusan Model

Pada penelitian ini, model yang digunakan adalah model $S_h I_h R_h O S_c I_c R_c$ pada populasi kucing dan manusia. Populasi manusia terbagi menjadi tiga subpopulasi yaitu subpopulasi manusia rentan S_h (*susceptible*), subpopulasi manusia yang terinfeksi toksoplasmosis I_h (*infected*), dan subpopulasi manusia yang sembuh R_h (*recovered*). Populasi kucing terbagi menjadi tiga subpopulasi yaitu subpopulasi manusia kucing rentan S_h (*susceptible*), subpopulasi kucing yang terinfeksi toksoplasmosis I_c (*infected*), dan subpopulasi kucing yang sembuh R_c (*recovered*).

Selain itu ada subpopulasi *O* (*ookista*), yaitu subpopulasi parasit *Toxoplasma gondii* yang dijatuhkan oleh kucing bersama dengan kotorannya. *Ookista* dapat menyebabkan infeksi *toksoplasmosis* jika terjadi interaksi antara kucing rentan dan *ookista* atau manusia rentan dengan *ookista*. Interaksi dapat berupa tertelannya *ookista* bersamaan dengan makanan ataupun minuman yang dikonsumsi kucing rentan maupun manusia rentan. Secara sistematis model penyebaran *toksoplasmosis* dapat dibuat dalam bentuk skema sebagai berikut.



Gambar 1. Diagram Kompartemen Penyebaran Toksoplasmosis

Dari skema model tersebut, dihasilkan model penyebaran *toksoplasmosis* dalam bentuk persamaan differensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_h}{dt} &= \alpha_h - \beta_h S_h O - \mu_h S_h \\
 \frac{dI_h}{dt} &= \beta_h S_h O - \gamma_h I_h - \mu_h I_h \\
 \frac{dR_h}{dt} &= \gamma_h I_h - \mu_h R_h \\
 \frac{dO}{dt} &= k I_c - \mu_o O \\
 \frac{dS_c}{dt} &= \alpha_c - \beta_c S_c O - \mu_c S_c \\
 \frac{dI_c}{dt} &= \beta_c S_c O - \gamma_c I_c - \mu_c I_c \\
 \frac{dR_c}{dt} &= \gamma_c I_c - \mu_c R_c
 \end{aligned} \tag{1}$$

Karena populasi konstan, maka $S_h + I_h + R_h = N_h = 1$, begitu juga dengan $S_c + I_c + R_c = N_c = 1$. Dari model (1) dapat dilihat bahwa variabel R_h dan R_c tidak berpengaruh terhadap variabel lain. Variabel R_h dan R_c juga dapat diketahui jika variabel-variabel lainnya diketahui. Oleh karena itu model (1) dapat direduksi untuk mempermudah analisis.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_h}{dt} &= \alpha_h - \beta_h S_h O - \mu_h S_h \\
 \frac{dI_h}{dt} &= \beta_h S_h O - \gamma_h I_h - \mu_h I_h \\
 \frac{dO}{dt} &= kI_c - \mu_o O \\
 \frac{dS_c}{dt} &= \alpha_c - \beta_c S_c O - \mu_c S_c \\
 \frac{dI_c}{dt} &= \beta_c S_c O - \gamma_c I_c - \mu_c I_c
 \end{aligned} \tag{2}$$

Setelah itu akan diperkenalkan waktu tunda $\tau > 0$ pada model (1). Waktu tunda digunakan untuk mempertimbangkan bahwa parasit *ookista* tidak bisa menginfeksi setelah ditumpahkan oleh kucing bersamaan dengan kotorannya. *Ookista* dapat menginfeksi setelah parasit tersebut bersporulasi. Oleh karena itu diperlukan waktu tunda.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_h(t)}{dt} &= \alpha_h - \beta_h S_h(t)O(t) - \mu_h S_h(t) \\
 \frac{dI_h(t)}{dt} &= \beta_h S_h(t)O(t) - \gamma_h I_h(t) - \mu_h I_h(t) \\
 \frac{dR_h(t)}{dt} &= \gamma_h I_h(t) - \mu_h R_h(t) \\
 \frac{dO(t)}{dt} &= kI_c(t - \tau) - \mu_o O(t) \\
 \frac{dS_c(t)}{dt} &= \alpha_c - \beta_c S_c(t)O(t) - \mu_c S_c(t) \\
 \frac{dI_c(t)}{dt} &= \beta_c S_c(t)O(t) - \gamma_c I_c(t) - \mu_c I_c(t) \\
 \frac{dR_c(t)}{dt} &= \gamma_c I_c(t) - \mu_c R_c(t)
 \end{aligned} \tag{3}$$

Seperti sebelumnya, untuk mempermudah analisis direduksi model dengan waktu tunda menjadi seperti berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_h(t)}{dt} &= \alpha_h - \beta_h S_h(t)O(t) - \mu_h S_h(t) \\
 \frac{dI_h(t)}{dt} &= \beta_h S_h(t)O(t) - \gamma_h I_h(t) - \mu_h I_h(t) \\
 \frac{dO(t)}{dt} &= kI_c(t - \tau) - \mu_o O(t) \\
 \frac{dS_c(t)}{dt} &= \alpha_c - \beta_c S_c(t)O(t) - \mu_c S_c(t) \\
 \frac{dI_c(t)}{dt} &= \beta_c S_c(t)O(t) - \gamma_c I_c(t) - \mu_c I_c(t)
 \end{aligned} \tag{4}$$

Titik Ekuilibrium

Berdasarkan (2) diperoleh dua titik ekuilibrium. Pertama, titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (S_h, I_h, O, S_c, I_c) = (1, 0, 0, 1, 0)$. Kedua, titik ekuilibrium endemik penyakit $E^* = (S_h^*, I_h^*, O^*, S_c^*, I_c^*)$

dimana

$$\begin{aligned}
 S_h^* &= \frac{\alpha_h \beta_c \mu_o (\mu_c + \gamma_c)}{\beta_h \beta_c k \alpha_c - \mu_c \mu_o (\mu_c + \gamma_c) + \beta_c \mu_h \mu_o (\mu_c + \gamma_c)} \\
 I_h^* &= \frac{\beta_h \beta_c \alpha_h \alpha_c k - \beta_h \alpha_h \mu_c \mu_o (\mu_c + \gamma_c)}{(\beta_h \beta_c \alpha_c k - \mu_c \mu_o (\mu_c + \gamma_c) + \beta_c \mu_h \mu_o (\mu_c + \gamma_c))(\mu_c + \gamma_c)} \\
 O^* &= \frac{\alpha_c \beta_c k + \mu_c \mu_o (\mu_c + \gamma_c)}{\beta_c \mu_o (\mu_c + \gamma_c)} \\
 S_c^* &= \frac{\mu_o (\mu_c + \gamma_c)}{\beta_c k} \\
 I_c^* &= \frac{\alpha_c \beta_c k + \mu_c \mu_o (\mu_c + \gamma_c)}{\beta_c k (\mu_c + \gamma_c)}
 \end{aligned}$$

Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar ditentukan oleh *radius spectral* atau nilai eigen terbesar dari *next generation matrix*, didapat

$$R_0 = \frac{\beta_c k}{\mu_o (\mu_c + \gamma_c)}$$

Analisis Kestabilan Tanpa Waktu Tunda

Teorema 1. Titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$, tetapi tidak stabil jika $R_0 > 1$.

Bukti. Dilakukan linearisasi persamaan (2) di titik E_0 sehingga menghasilkan matriks jacobi

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu_h & 0 & -\beta_h & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu_h + \gamma_h) & \beta_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_o & 0 & k \\ 0 & 0 & -\beta_c & -\mu_c & 0 \\ 0 & 0 & \beta_c & 0 & -(\mu_c + \gamma_c) \end{pmatrix}$$

Nilai eigen $J(E_0)$ diperoleh dengan melakukan penyelesaian persamaan

$$|JE_0 - \lambda I| = 0$$

Diperoleh $\lambda_1 = -\mu_h$, $\lambda_2 = -(\mu_h + \gamma_h)$, dan $\lambda_3 = -\mu_c$ sedangkan dua nilai eigen yang tersisa dapat ditentukan dari persamaan kuadrat berikut:

$$\left(\lambda^2 + (\mu_o + \mu_c + \gamma_c)\lambda - (\beta_c k - (\mu_o(\mu_c + \gamma_c))) \right) = 0$$

Persamaan kuadrat tersebut dimodifikasi dengan melibatkan R_0 , sehingga menjadi

$$\left(\lambda^2 + (\mu_o + \mu_c + \gamma_c)\lambda + (1 - R_0)\mu_o(\mu_c + \gamma_c) \right) = 0$$

- Jika $R_0 < 1$, maka semua akar persamaan kuadrat tersebut memiliki bagian real yang negatif. Oleh karena itu semua nilai eigen dari matriks jacobian $J(E_0)$ memiliki bagian real yang negatif sehingga titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 stabil asimtotik lokal.
- Jika $R_0 > 1$, maka terdapat salah satu akar persamaan kuadrat tersebut yang bagian realnya bernilai positif. Oleh karena itu terdapat nilai eigen dari matriks jacobian $J(E_0)$ yang bagian realnya bernilai negatif sehingga titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 tidak stabil.

Teorema 2. Titik ekuilibrium endemik penyakit (E^*) stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$, tetapi tidak stabil jika $R_0 < 1$.

Bukti. Dilakukan linearisasi persamaan (2) di titik E^* sehingga menghasilkan matriks jacobin

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -(\mu_h + \beta_h O^*) & 0 & -\beta_h S_h^* & 0 & 0 \\ \beta_h O^* & -(\mu_h + \gamma_h) & \beta_h S_h^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_o & 0 & k \\ 0 & 0 & -\beta_c S_c^* & -(\mu_c + \beta_c O^*) & 0 \\ 0 & 0 & \beta_c S_c^* & \beta_c O^* & -(\mu_c + \gamma_c) \end{pmatrix}$$

Nilai eigen $J(E^*)$ diperoleh dengan melakukan penyelesaian persamaan

$$|JE^* - \lambda I| = 0$$

Diperoleh $\lambda_1 = -(\mu_h + \gamma_h)$, dan $\lambda_2 = -\left(\mu_h + \frac{\beta_h \mu_c (R_0 - 1)}{\beta_c} \right)$ sedangkan dua nilai eigen yang tersisa dapat ditentukan dari persamaan polinomial berikut:

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda - C \tag{5}$$

dimana

$$A = 1$$

$$B = 2\mu_c + \mu_o + \gamma_c + (R_0 - 1),$$

$$C = \mu_o\mu_c + \mu_c(\mu_c + \gamma_c) + \mu_o\mu_c(R_0 - 1) + \mu_c(R_0 - 1)(\mu_c + \gamma_c)$$

$$D = \mu_o\mu_c(\mu_c + \gamma_c)(R_0 - 1) + \mu_o\mu_c(\mu_c + \gamma_c)$$

$BC - D = e(R_0 - 1)^2 + (e + f)(R_0 - 1) + f$, jika $R_0 > 1$ maka

$$BC - D > 0$$

dimana

$$e = \mu_c^2(\mu_c + \gamma_c) + \mu_c(\mu_o\mu_c)$$

$$f = \mu_c(\mu_c + \gamma_c)^2 + \mu_o\mu_c^2(\mu_c + \gamma_c) + (\mu_o + \mu_c)(\mu_o\mu_c)$$

- Jika $R_0 > 1$, maka semua akar persamaan polinom (5) merupakan akar-akar dengan bagian real negatif. Oleh karena itu semua nilai eigen dari matriks jacobian $J(E^*)$ memiliki bagian real yang negatif sehingga titik ekuilibrium endemik penyakit E^* stabil asimtotik lokal.
- Jika $R_0 < 1$, maka terdapat minimal satu akar persamaan polinom (5) yang bagian realnya bernilai negatif. Oleh karena itu terdapat nilai eigen dari matriks jacobian $J(E^*)$ yang bagian realnya bernilai negatif sehingga titik ekuilibrium endemik penyakit E_0 tidak stabil.

Analisis Kestabilan dengan Waktu Tunda

Teorema 3. Titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$, tetapi tidak stabil jika $R_0 > 1$.

Bukti. Dilakukan linearisasi persamaan (4) di titik E_0 sehingga menghasilkan matriks jacobin

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu_h & 0 & -\beta_h & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu_h + \gamma_h) & \beta_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_c & -\mu_c & 0 \\ 0 & 0 & \beta_c & 0 & -(\mu_c + \gamma_c) \end{pmatrix} \quad J(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen $J(E_0)$ diperoleh dengan melakukan penyelesaian persamaan

$$|J(E_0) + J(\tau)e^{-\lambda\tau} - \lambda I| = 0$$

Diperoleh $\lambda_1 = -\mu_h$, $\lambda_2 = -(\mu_h + \gamma_h)$, dan $\lambda_3 = -\mu_c$ sedangkan dua nilai eigen yang tersisa dapat ditentukan dari persamaan polinomial berikut.

$$\lambda^2 + A\lambda + B - Ce^{-\lambda\tau} = 0 \tag{6}$$

dimana $A = \mu_o + \mu_c + \gamma_c$, $B = \mu_o(\mu_c + \gamma_c)$, dan $C = \beta_c k$

Misalkan $\lambda = iw$ ($w > 0$) merupakan akar dari persamaan polinomial (6).

Diselesaikan sehingga diperoleh

$$w^4 + (A^2 - 2B)w^2 + (B^2 - C^2) = 0 \quad (7)$$

diperoleh koefisien persamaan polinomial (7) Sebagai berikut

$$A^2 - 2B = \mu_o^2 + \mu_c^2 + \gamma_c^2 + 2\mu_c\gamma_c$$

$$A^2 - 2B > 0$$

Selanjutnya

$$B^2 - C^2 = (1 - (R_0^2))(\mu_o(\mu_c + \gamma_c))^2$$

- Jika $R_0 < 1$, maka $B^2 - C^2 > 0$ sehingga persamaan polinom (7) tidak memiliki variasi tanda pada semua koefisien. Menurut aturan tanda Descartes persamaan (7) tidak akan menghasilkan akar real positif. Oleh karena itu semua nilai eigen dari matriks jacobian $J(E_0)$ memiliki bagian real yang negatif untuk semua $\tau > 0$ sehingga titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 stabil asimtotik lokal.
- Jika $R_0 > 1$, maka $B^2 - C^2 < 0$ sehingga persamaan polinom (7) memiliki variasi tanda pada koefisien. Menurut aturan tanda Descartes persamaan (7) akan menghasilkan paling tidak satu akar real positif. Oleh karena terdapat paling tidak satu buah nilai eigen dari matriks jacobian $J(E_0)$ memiliki bagian real yang negatif untuk semua $\tau > 0$ sehingga titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 tidak stabil.

Teorema 4. Titik ekuilibrium endemik penyakit (E^*) stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$, tetapi tidak stabil jika $R_0 < 1$.

Bukti. Dilakukan linearisasi persamaan (4) di titik E^* sehingga menghasilkan matriks jacobin

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -(\mu_h + \beta_h O^*) & 0 & -\beta_h S_h^* & 0 & 0 \\ \beta_h O^* & -(\mu_h + \gamma_h) & \beta_h S_h^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_c S_c^* & -(\mu_c + \beta_c O^*) & 0 \\ 0 & 0 & \beta_c S_c^* & \beta_c O^* & -(\mu_c + \gamma_c) \end{pmatrix}$$

$$J(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen $J(E_0)$ diperoleh dengan melakukan penyelesaian persamaan

$$|J(E^*) + J(\tau)e^{-\lambda\tau} - \lambda I| = 0$$

Diperoleh $\lambda_1 = -(\mu_h + \gamma_h)$, dan $\lambda_2 = -\left(\mu_h + \frac{(\beta_h \alpha_c + \beta_h \mu_c)(R_0 - 1)}{\beta_c}\right)$ sedangkan dua nilai eigen yang tersisa dapat ditentukan dari persamaan polinomial berikut.

$$(\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda - Ce^{-\lambda\tau}\lambda + M - Ne^{-\lambda\tau}) \quad (8)$$

Misalkan $\lambda = iw$ ($w > 0$) merupakan akar dari persamaan polinomial (8).

Diselesaikan sehingga diperoleh

$$w^6 + (A^2 - 2B)w^4 + (B^2 - C^2 - 2M)w^2 + (M^2 - N^2) = 0 \quad (9)$$

diperoleh koefisien persamaan polinomial (9) Sebagai berikut

$$A^2 - 2B = 2\mu_c^2 + \mu_o^2 + \gamma_c^2 + \mu_c^2(R_0 - 1)^2 + 2\mu_c(R_0 - 1)(2\mu_c + \gamma_c + 1),$$

$$B^2 - C^2 - 2M = \mu_o\mu_c(\mu_o\mu_c + 2\mu_c(R_0 - 1)^2 + \mu_o\mu_c(R_0 - 1)^2) +$$

$$\mu_o\mu_c(\mu_c + \gamma_c)(2\mu_o + 2\mu_c + (\mu_c + \gamma_c) + 1) +$$

$$\mu_o\mu_c(R_0 - 1)(2\mu_o\mu_c + 2\mu_c) + \mu_o\mu_c(\mu_c + \gamma_c)(R_0 - 1)(2\mu_o\mu_c + 2\mu_c) +$$

$$(R_0 - 1)(2\mu_c^2(\mu_c + \gamma_c) + \mu_c^2(R_0 - 1) + \mu_c^2(\mu_c + \gamma_c)^2)$$

$$M^2 - N^2 = \mu_o^2\mu_c^2 + \mu_o^2\mu_c^2(R_0 - 1)(\mu_c + \gamma_c) + (R_0 - 1)^2(\mu_o^2\mu_c^2(\mu_c + \gamma_c)^2 + k^2\mu_c^2(1 + \mu_c))$$

- Jika $R_0 < 1$, maka $A^2 - 2B < 0$, $B^2 - C^2 - 2M < 0$, dan $M^2 - N^2 < 0$, sehingga persamaan polinom (9) memiliki variasi tanda pada koefisien. Menurut aturan tanda Descartes persamaan (9) akan menghasilkan paling tidak satu akar real positif. Oleh karena terdapat paling tidak satu buah nilai eigen dari matriks jacobian $J(E^*)$ memiliki bagian real yang negatif untuk semua $\tau > 0$ sehingga titik ekuilibrium endemik penyakit E^* tidak stabil.
- Jika $R_0 > 1$, maka $A^2 - 2B > 0$, $B^2 - C^2 - 2M > 0$, dan $M^2 - N^2 > 0$, sehingga persamaan polinom (9) tidak memiliki variasi tanda pada koefisien. Menurut aturan tanda Descartes persamaan (9) tidak akan menghasilkan akar real positif. Oleh karena semua nilai eigen dari matriks jacobian $J(E^*)$ memiliki bagian real yang negatif untuk semua $\tau > 0$ sehingga titik ekuilibrium endemik penyakit E^* stabil asimtotik lokal.

Simulasi Numerik

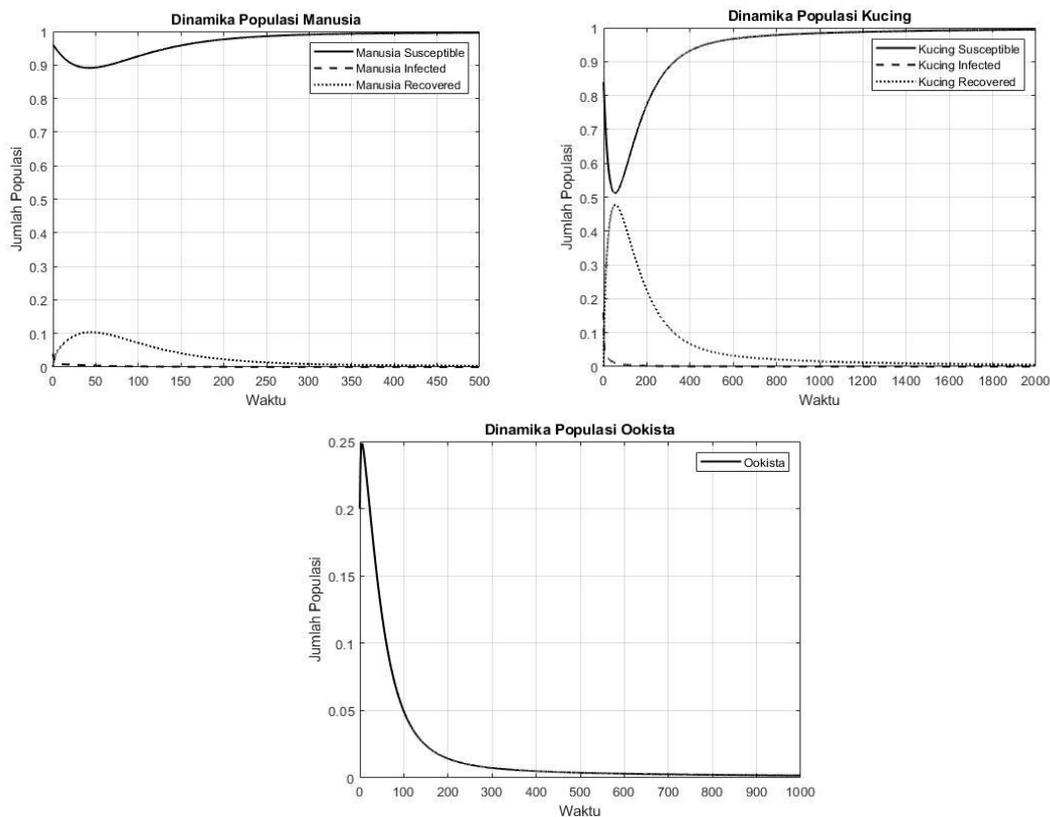
Simulasi numerik dilakukan dengan berbagai skenario dengan berbagai nilai waktu tunda dan kombinasi nilai parameter-parameter yang lain untuk mendapatkan bilangan reproduksi dasar $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$. Simulasi dilakukan dengan nilai awal populasi $S_h = 0,9$, $I_h = 0,1$, $R_h = 0$, $O = 0$, $S_c = 0,8$, $I_c = 0,2$, dan $R_c = 0$. Metode numerik yang digunakan adalah metode Euler dan program Matlab dengan memberikan nilai-nilai parameter tetap dari sistem oleh (Gilberto Gonzales-Parra *et all* 2021) dan (Idris Muhammad *et all*, 2022) sebagai berikut.

Tabel 1. Keterangan dan Nilai Parameter

Parameter	Keterangan	Nilai
μ_c	Tingkat kelahiran dan kematian alami kucing	0,01153
β_c	Laju transmisi populasi kucing rentan ke populasi kucing terinfeksi	0,962
γ_c	Laju transmisi populasi kucing terinfeksi ke populasi yang telah sembuh	0,5
μ_o	Tingkat pembersihan <i>ookista</i>	0,0384
k	Tingkat kemunculan <i>ookista</i> di lingkungan	0.2
μ_h	Tingkat kelahiran dan kematian alami manusia	0,0233
β_h	Laju transmisi populasi manusia rentan ke populasi manusia terinfeksi	0,0206
γ_h	Laju transmisi populasi kucing terinfeksi ke populasi yang telah sembuh	0,5

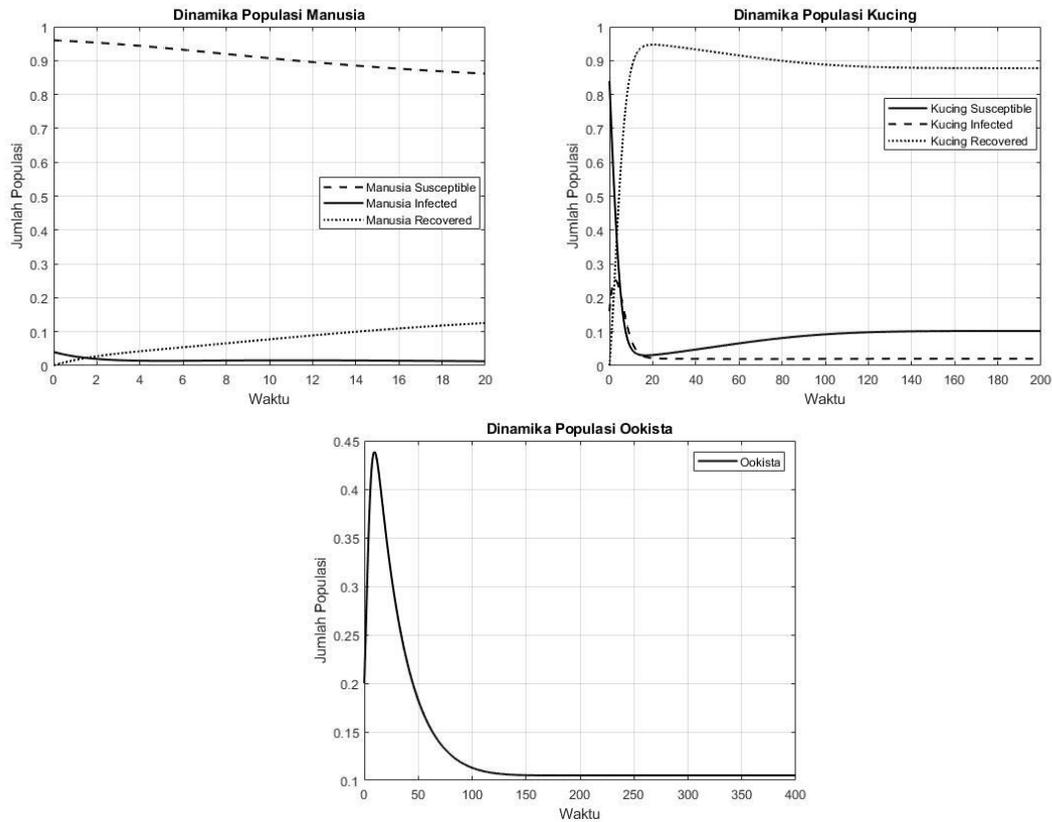
Simulasi Numerik Tanpa Waktu Tunda

Pada skenario pertama, parameter β_c yang digunakan pada simulasi numerik tanpa waktu tunda adalah $\beta_c = 0,0962$ sehingga $R_0 < 1$.



Gambar 1. Perilaku Solusi Terhadap Waktu Ketika $R_0 < 1$ Tanpa Waktu Tunda

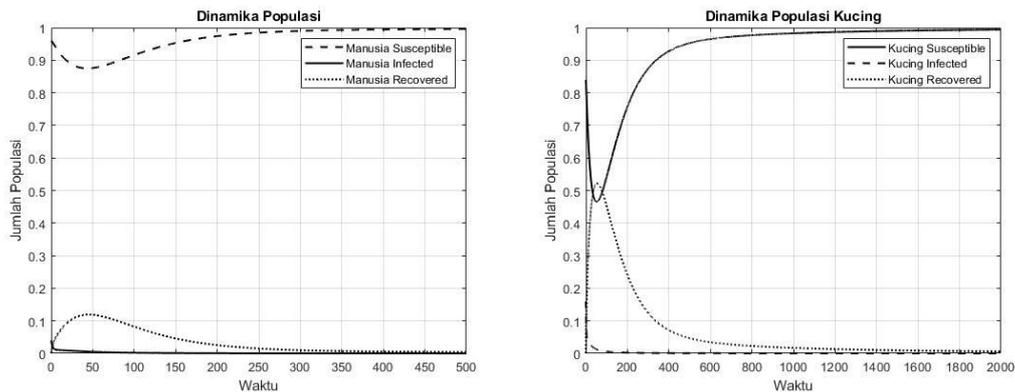
Pada skenario yang kedua, parameter β_c yang digunakan pada simulasi numerik tanpa waktu tunda adalah $\beta_c = 0,962$ sehingga bilangan reproduksi dasar berubah menjadi $R_0 > 1$.

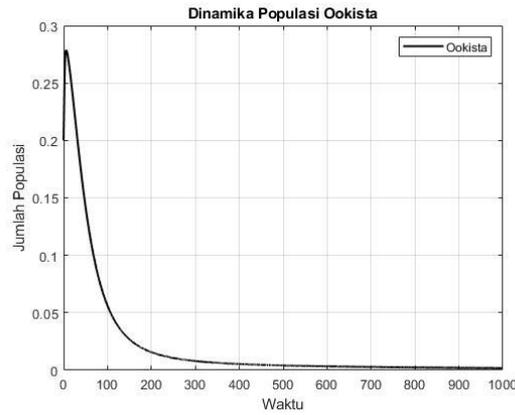


Gambar 2. Perilaku Solusi Terhadap Waktu Ketika $R_0 > 1$ Tanpa Waktu Tunda

Simulasi Numerik dengan Waktu Tunda

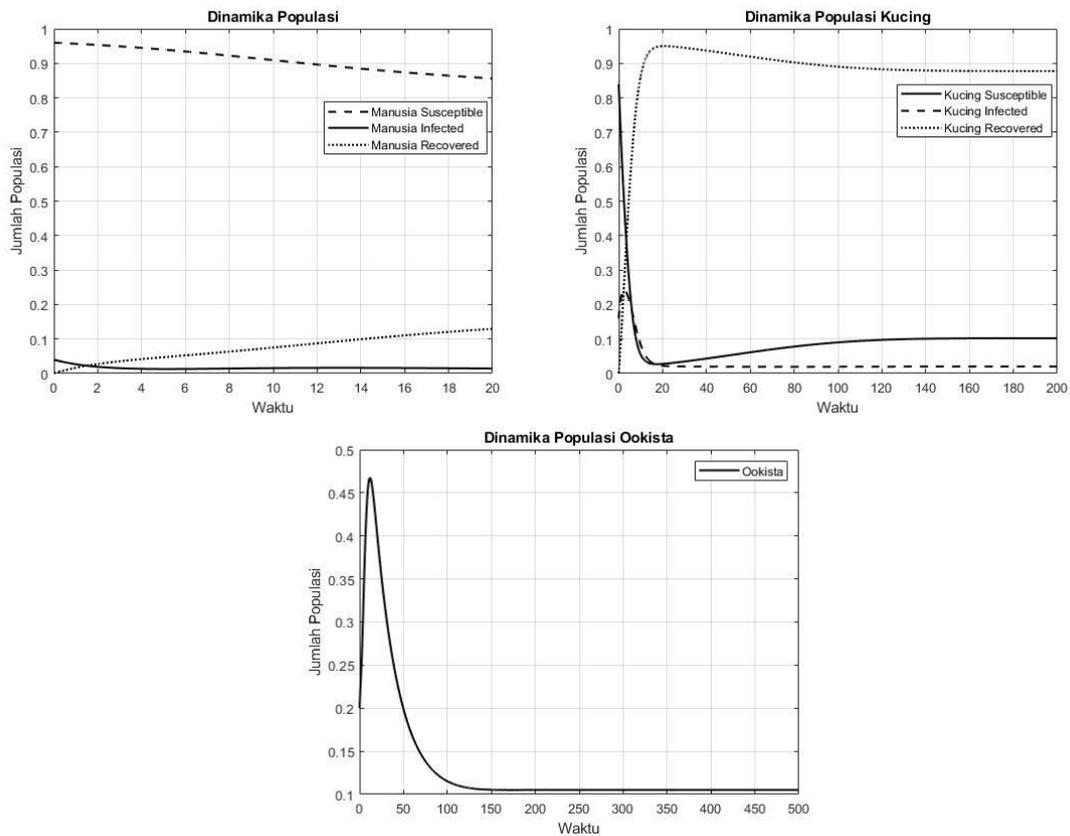
Pada skenario pertama, parameter β_c yang digunakan pada simulasi numerik dengan waktu tunda adalah $\beta_c = 0,0962$ sehingga $R_0 < 1$ dan dengan waktu tunda $\tau = 2$.





Gambar 3. Perilaku Solusi Terhadap Waktu Ketika $R_0 < 1$ dengan Waktu Tunda

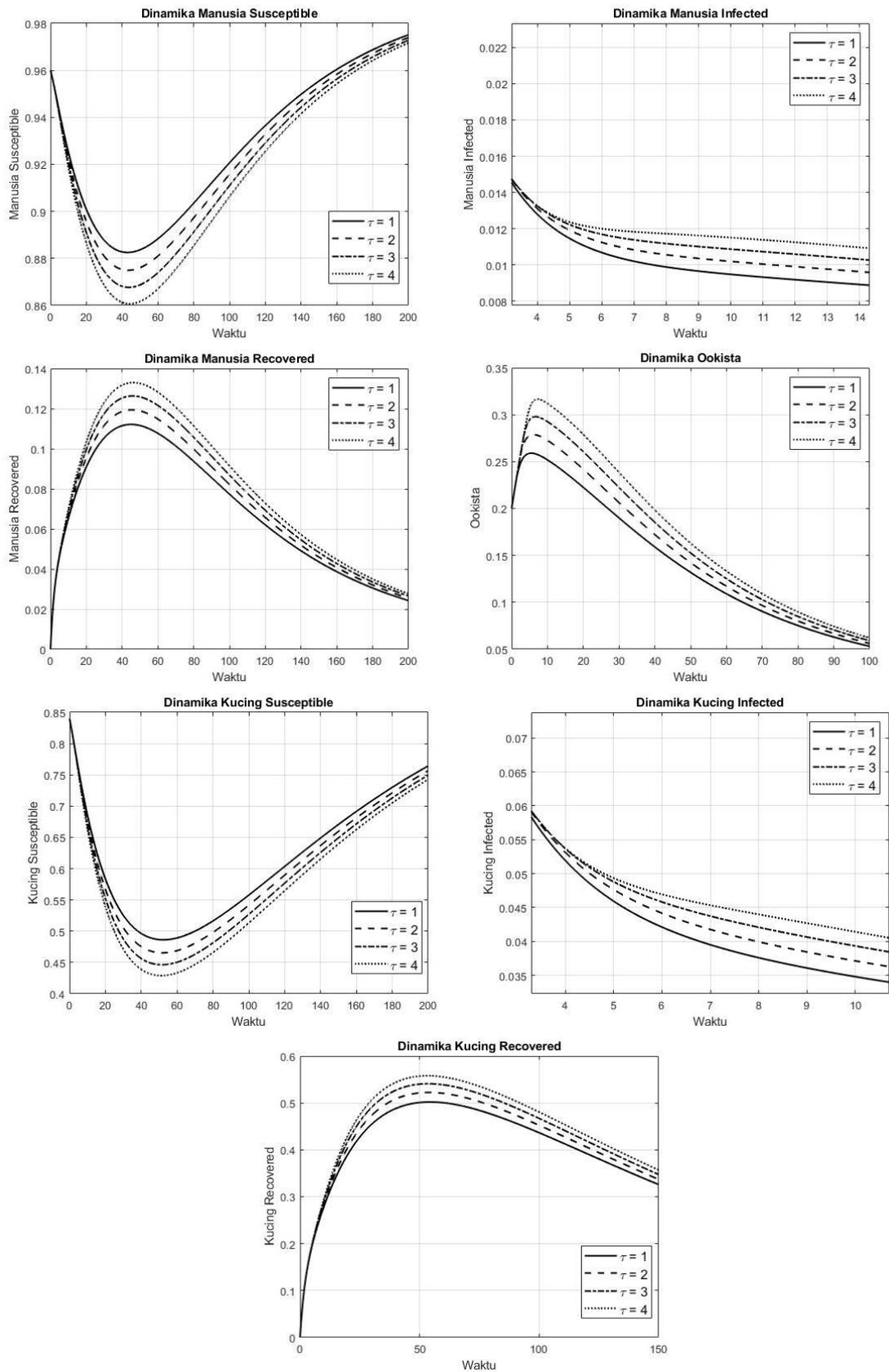
Pada skenario yang kedua, parameter β_c yang digunakan pada simulasi numerik dengan waktu tunda adalah $\beta_c = 0,962$ sehingga $R_0 > 1$ dan dengan waktu tunda $\tau = 2$.



Gambar 4. Perilaku Solusi Terhadap Waktu Ketika $R_0 > 1$ dengan Waktu Tunda $\tau = 2$

Efek Waktu Tunda

Parameter β_c yang digunakan pada simulasi numerik dengan waktu tunda kali ini adalah $\beta_c = 0,0962$ sehingga $R_0 < 1$. Simulasi dilakukan tanpa waktu tunda dan dengan waktu tunda 1-4.



Gambar 5. Perilaku Solusi Terhadap Waktu Ketika $R_0 < 1$ dengan Waktu Tunda

PEMBAHASAN

Simulasi numerik model matematika penyebaran penyakit *toksoplasmosis* pada populasi kucing dan manusia dilakukan tanpa waktu tunda dan dengan waktu tunda. Ketika $R_0 < 1$ solusi stabil menuju titik ekuilibrium bebas penyakit tanpa waktu tunda maupun dengan waktu tunda. Ketika $R_0 > 1$ solusi stabil menuju titik ekuilibrium endemik penyakit tanpa waktu tunda maupun dengan waktu tunda

Pada Gambar 5 menunjukkan perubahan populasi pada setiap kelas. Kelas manusia *susceptible* pada awalnya mengalami penurunan populasi, kemudian mengalami peningkatan hingga mencapai dan stabil di titik 1 yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit. Dari Gambar 5 juga dapat dilihat semakin besar waktu tunda yang diberikan akan menyebabkan semakin besar penurunan populasi manusia *susceptible* pada waktu awal, namun selanjutnya akan naik lebih cepat juga dibanding dengan waktu tunda yang lebih kecil.

Kelas manusia *infected* mengalami penurunan populasi yang signifikan hingga mencapai dan stabil di titik 0 yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit. Dari Gambar 5 juga dapat dilihat semakin besar waktu tunda yang diberikan, akan menyebabkan semakin besar penurunan populasi manusia *infected*, namun selanjutnya akan turun lebih lama dibanding dengan waktu tunda yang lebih besar.

Pada awalnya kelas manusia *recovered* mengalami peningkatan populasi, kemudian mengalami penurunan. Dari Gambar 5 juga dapat dilihat semakin besar waktu tunda yang diberikan akan menyebabkan semakin besar kenaikan populasi manusia *recovered* pada waktu awal, namun selanjutnya akan turun lebih cepat juga dibanding dengan waktu tunda yang lebih kecil.

Pada awalnya kelas *ookista* mengalami peningkatan, semakin besar waktu tunda yang diberikan semakin besar pula peningkatan awal terjadi. Kemudian setelah itu *ookista* mengalami penurunan hingga mencapai dan stabil di titik 0 yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit. Dari Gambar 5 juga dapat dilihat semakin besar waktu tunda yang diberikan, akan menyebabkan semakin besar kenaikan populasi *ookista* pada waktu awal, namun selanjutnya akan lebih cepat turun dibanding dengan waktu tunda yang lebih kecil.

Pada awalnya kelas kucing *susceptible* mengalami penurunan populasi, kemudian mengalami peningkatan hingga mencapai dan stabil di titik 1 yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit. Dari Gambar 5 juga dapat dilihat semakin besar waktu tunda yang diberikan akan menyebabkan semakin besar penurunan populasi kucing *susceptible* pada waktu awal, namun selanjutnya akan naik lebih cepat dibanding dengan waktu tunda yang lebih kecil.

Kelas manusia *infected* mengalami penurunan populasi yang signifikan hingga mencapai dan stabil di titik 0 yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit. Dari Gambar 5 juga dapat dilihat semakin kecil waktu tunda yang diberikan, akan menyebabkan semakin besar penurunan populasi kucing *infected* pada waktu awal, namun selanjutnya akan lebih lama turun dibanding dengan waktu tunda yang lebih besar.

Pada awalnya kelas kucing *susceptible* mengalami peningkatan populasi, kemudian mengalami penurunan. Dari Gambar 5 juga dapat dilihat semakin besar

waktu tunda yang diberikan akan menyebabkan semakin besar kenaikan populasi kucing *recovered* pada waktu awal, namun selanjutnya akan turun lebih cepat juga dibanding dengan waktu tunda yang lebih kecil.

Dari uraian diatas dapat disimpulkan bahwa dengan memberikan waktu tunda 1–4 akan menyebabkan perbedaan dinamika populasi setiap kelas pada waktu awal, namun selanjutnya solusi bergerak menuju dan stabil pada titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (1,0,0,1,0)$.

KESIMPULAN DAN REKOMENDASI

Dalam penelitian ini ini dianalisis model penyebaran *toksoplasmosis* pada populasi kucing dan manusia dengan waktu tunda. Model yang dihasilkan dapat menggambarkan perilaku penyebaran *toksoplasmosis*

Model matematika penyebaran penyakit *toksoplasmosis* pada populasi kucing dan manusia memiliki dua titik ekuilibrium yaitu (1) Titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0), Ketika $R_0 < 1$ diperoleh bahwa sistem bersifat stabil asimtotik lokal tanpa waktu tunda maupun dengan waktu tunda. (2) Titik ekuilibrium endemik penyakit (E^*), Ketika $R_0 > 1$ diperoleh bahwa sistem bersifat stabil asimtotik lokal tanpa waktu tunda maupun dengan waktu tunda.

Hasil simulasi numerik menunjukkan akan punah atau tidak, bergantung pada parameter β_c . Ketika $R_0 < 1$ solusi stabil menuju titik ekuilibrium bebas penyakit tanpa waktu tunda maupun dengan waktu tunda. Ketika $R_0 > 1$ solusi stabil menuju titik ekuilibrium endemik penyakit tanpa waktu tunda maupun dengan waktu tunda. Dengan memberikan waktu tunda 1–4 akan menyebabkan perbedaan dinamika populasi setiap kelas pada waktu awal, namun selanjutnya semua solusi bergerak menuju titik kestabilan.

PENELITIAN LANJUTAN

Pada penelitian ini diasumsikan populasi tertutup dan tingkat kelahiran dan kematian alami pada populasi kucing dan manusia diasumsikan sama sehingga populasi konstan atau tidak berubah. Disarankan pada penelitian selanjutnya menggunakan populasi yang berubah atau tidak konstan. Untuk penelitian selanjutnya juga dapat dibahas masalah bifurkasi pada model penyebaran penyakit *toksoplasmosis* pada populasi kucing dan manusia dengan waktu tunda.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan memberikan masukan serta arahan kepada penulis dalam penyelesaian artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Aranda Diego, Rafael J, A. J. G. C., (2008): Mathematical modeling of Toxoplasmosis disease in varying size populations, *Computers and Mathematics with Applications*, 690–696.
- Center For Disease Control, CDC, C., (2022): Toxoplasmosis, online: www.cdc.gov/parasites/toxoplasmosis.
- Fabianingsih Ni Putu Eka, Wayan Tunas Artama, d. C. I., (2017): Seroprevalensi *Toksoplasmosis* di Gianya Bali, *BKM Journal of Community Medicine and Public Health*, 33(2), 61–66.
- Frenkel J, Dubey j, M. N. L., (1970): *Toxoplasma gondii* in cats: fecal stages identified as coccidian oocysts, *Science*, 893–896.
- Ganmacher, F., (1959): *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, New York.
- Gilberto Gonzales-Parra, Abraham J.Arenas, D. F. R. J. L. J., (2008): Dynamics of a model of Toxoplasmosis disease in human and cat populations, *Computers and Mathematics with Applications*, 57, 1692–1700.
- Gilberto Gonzales-Parra, Sharmin Sultana, Abraham J.Arenas., (2022): Mathematical Modeling of Toxoplasmosis Considering a Time Delay in the Infectivity of Oocysts, MDPI.
- G.J Olsder, W. J. V. D., (1998): *Mathematical System Theory*, Second
- Hanh, W., (1967): *Stability of Motion*, Springer-Verlag, New York.
- Idris Muhammad, S. U., (2021): Dynamics of Toxoplasmosis Disease in Cats population with vaccination, *Journal of the Nigerian Society of Physical Sciences*, 3, 17–25.
- Muhammad Hanafiah, Mufti Kamaruddin, W. N. W., (2010): Studi Infeksi *Toksoplasmosis* pada Manusia dan Hubungannya dengan Hewan di Banda Aceh, *Jurnal Kedokteran Hewan*, 4.
- Riyanda, e. a., (2019): Seroprevalensi *Toxoplasma gondii* pada Hewan Ternak Kambing di Kota Bandar Lampung.
- W Nurcahyo, D. P., (2019): *Toksoplasmosis Pada Hewan*, Samudra Biru, Yogyakarta.